流体力学における幾何学的問題

東京農工大学　　高木　隆司

1．はしがき

水は方円の器に従うと言われているとおり、一般に流体は固有の形を持たないので、幾何学的な解析には馴染まない。しかしながら、以下に説明するように、流体力学においても、空間の幾何学的性質の知識が有用になるいくつかの問題がある。本論では、筆者が興味を持っている２つの問題について、これまでに得られた結果を紹介する。それらは、混合層における１次元的な渦列の配置の統計的性質、および球形液滴の大振幅振動モードの決定である。

2．合併を繰り返す１次元渦列の間隔分布

多くの実験によって、異なる速度を持つ２つの流れの境界面に、同じ向きの渦の列が現れることが知られている［１－３］。この渦列は、下流に行くに従って乱雑に合併を行い、スケールを増すとともに常に一定の強さの不規則性を保持する。隣あう渦の間隔を確率変数とする分布が実験的に求められている［２、５］。

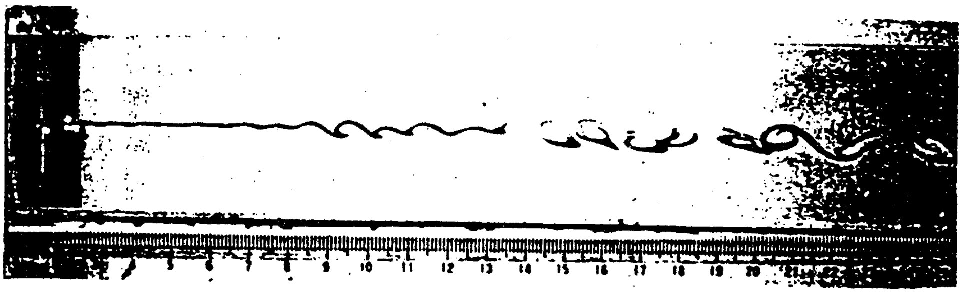

図１．　混合層における渦列の発達の可視化実験。（文献１参照）

この分布を求める理論は、筆者らによってなされたが、その後あまり研究されていない。この理論の目的は、渦間隔の分布関数　$n(\ell, t)$　を求めることであるが、そのとき相似変数　$\xi = \ell / \langle \ell \rangle$（$\langle \ell \rangle$は　ℓ の平均）を導入し、分布 n が ξ のみに依る、すなわち渦列は自己相似的に成長すると仮定した。
そして、n の変化を渦の合併による損失、および隣の渦の合併による損失と利得を現す項で記述し、その方程式を解いて n を近似的に求めた。その解は、実験とある程度一致していたが、最近の実験データとは合わない［５］。また、最近、$\log \xi$ の分布が小さな分散を持つと仮定して、$n(\xi)$ が対数正規分布になると言う説が現れている［6］。しかし、その物理的意味は不明である。

そこで、筆者は、$n(\xi)$ をより物理的意味のはっきりした統計力学的な取り扱いに依って求めることを試みた。まず、合併はせず、非粘性の方程式に従う無限小の大きさの渦点集合のエネルギーの公式

$$W = -\rho/4\pi \cdot \Sigma \Gamma i \Gamma j \log(rij) \quad + \quad \text{自己エネルギー} \tag{1}$$

から出発する。ここで、rij は渦iと渦jの距離、Γi は渦iの循環、ρは流体の密度である。自己エネルギーは他の渦との相互作用以外の寄与を表し、ここでは定数と仮定する。

次に、式(1)の第1項で最近接の渦対の相互作用のみを残し、最近接の渦対以外の相互作用、実際の渦列で起きる合併に依る位置の変動、および自己相似を仮定したために時間的に長さのスケールが縮小していることは各渦に対する熱的な揺らぎとみなす。そして、全ての渦間隔を変数とする多体分布関数が、次のようなボルツマン分布であると仮定する。

$$PN(\xi) = C\exp(\beta \Sigma \ln(\xi i{+}1 - \xi i)), \tag{2}$$

ただし、βは温度の逆数を表すパラメーター、Cは規格化定数である。これを各変数について順次積分し、1体分布関数にすることにより、つぎのようにn(ξ)が求められる。

$$n(\xi) = C\xi^{\beta}\exp(-(\beta+1)\xi). \tag{3}$$

式(3)の結果（β＝12の場合）を図2に示す。最近の実験とよく一致している。ただし、その一致は対数正規分布と同程度である。そこで、上記の理論の正当性を検査するために、以下に述べるように渦列の挙動の数値シミュレーションを行った。

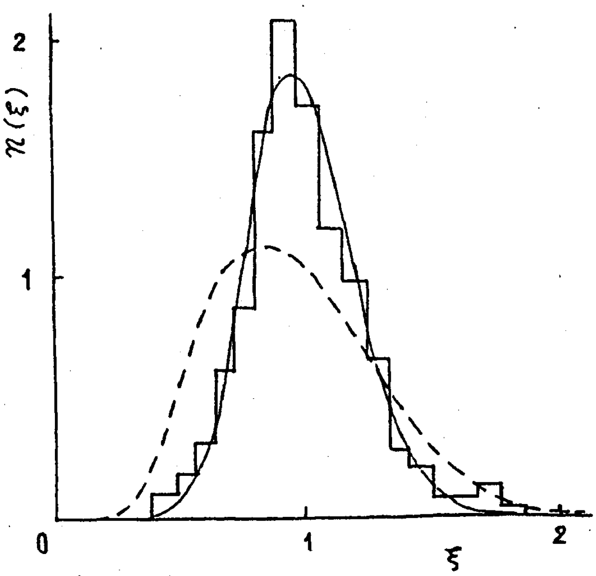

図2．間隔分布の理論結果（式(3)）。ヒストグラムは最近の測定［5］、点線は前の理論結果［4］。

数値シミュレーションにおいては、初期に５００個の渦点を一直線上に乱雑に置き、隣同士の渦の合併が ξ^{-2} に比例する確率で起きると仮定する。合併した後は、新しい渦の循環は元の循環の和になり、位置は元の渦対の重心に一致すると仮定する。結果の例を図３に示す。１０世代目で計算した間隔分布のヒストグラムが図中の右下に示してある。このヒストグラムは、図２の理論結果とほとんど一致する。

各渦の位置データから尤度解析を行うと、最も確からしいポテンシャルエネルギーの関数形が求められるはずである。この解析は、いま準備中である。

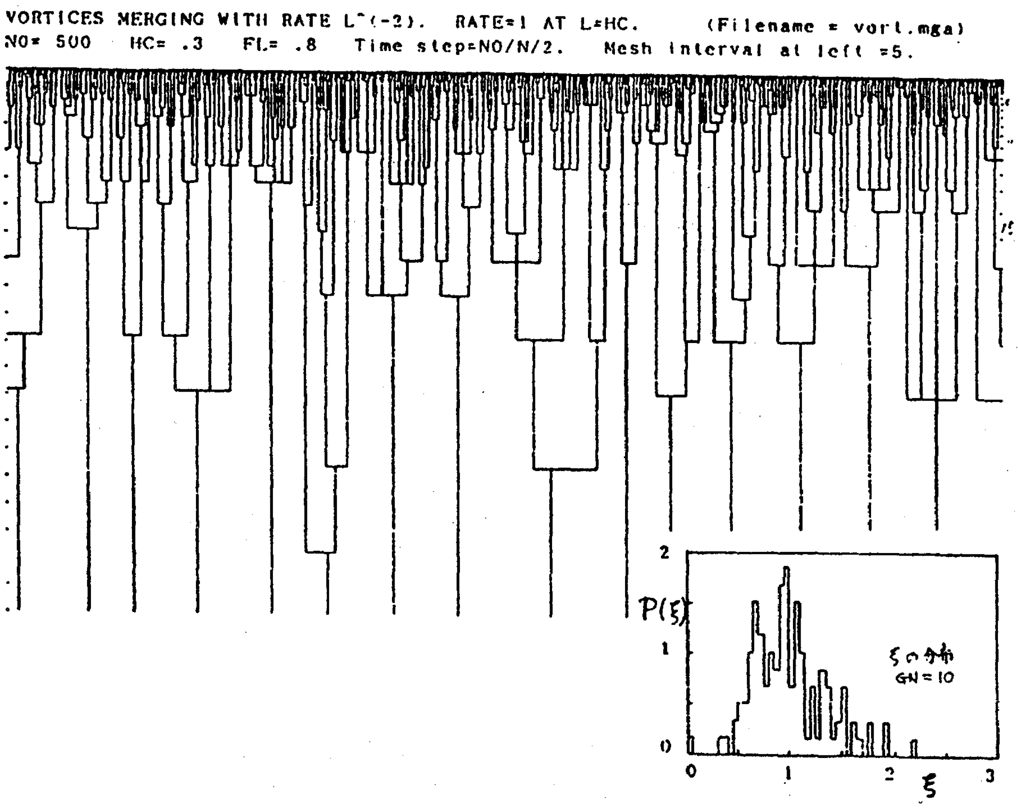

図３．数値シミュレーションに依る渦列の合併。右下は、１０世代目での渦間隔のヒストグラム。

３．球形液滴の非線形振動のモード

球形液滴の振動は、厳密には重力のない宇宙空間でしか起きない。そこで、計算機シミュレーションに依ってこの振動を作ってみる。この研究の動機は、球面上になるべく対称性の高い波動を作り、それを球面上のいろいろな現象を解析する際の数学的手段に応用することである。慣性と表面張力を考慮した微小振動の

基準のモードは、すでに知られている［7］。それは球面調和関数で表現されていて、z軸に関する対称性は高いが、x軸、y軸に関する対称性は低い。ここで、有限振幅の振動は正多角形のようなより高い対称性を持つということを仮定しよう。ただし、これははっきりした根拠のあることではなく、適切な実験に依ってたしかめる必要がある（実験はいま計画中である）。

さて、高い対称性の波は、便宜的に軸対称の球面調和関数を重ね合わせることにより求めることができる。その際、軸の方向は球面上に対称的に分布させる。以下に、そのいくつかの例を図によって示す。ただし、正４面体の形をした波は、１個の関数　Y32　だけで表せるので、重ね合わせは行っていない。

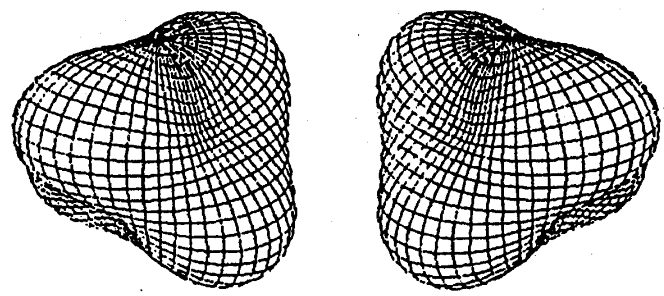

図４．球面調和関数　Y32．正４面体構造を保って振動している。

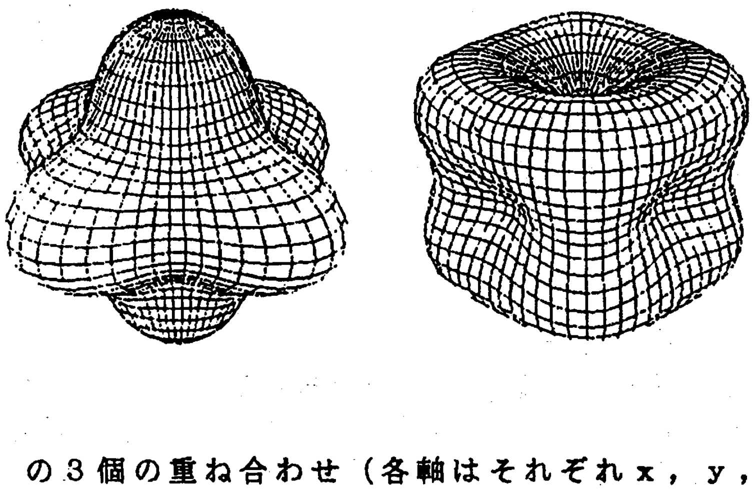

図５．Y40　の３個の重ね合わせ（各軸はそれぞれx，y，z軸を向く）．正８面体と正６面体の間で振動が起きている。

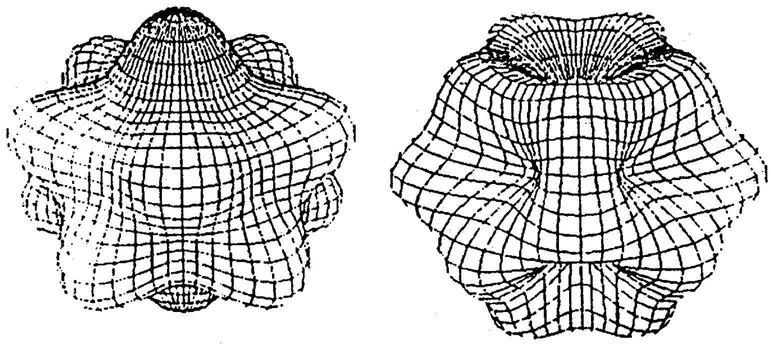

図６．Ｙ60　の６個の重ね合わせ（１個はｚ軸方向に、残りの５個はそれから 63.4度傾いた方向に向いている）。正２０面体と正１２面体の間で振動している。

以上の結果は、流体の方程式をといて求めたものではない。非線形効果を含む運動方程式をといて振動のモードを求めることが必要である。また、球形の液滴を用いて、どんな振動が観察されるか実験してみるのも興味がある。一方、多面体の知識を応用することにより、この問題に適した直交関数形を求めることも将来の発展として考えられる。

参考文献

[1] C.D.Winant & F.K.Browand:J. Fluid Mech. 63,237(1974).
[2] G.L.Brown & A.Roshko: J. Fluid Mech. 64,775(1974).
[3] 高木隆司：乱流の秩序構造、日本物理学会誌、37,20(1982).
[4] R.Takaki & L.S.G.Kovasznay:Phys. Fluids, 21,153(1978).
[5] L.P.Bernal:PhD Thesis, CalTech(1981).
[6] L.P.Bernal:Private Communication(1987).
[7] L.D.Landau & E.M.Lifshitz: Fluid Mechanics,Pergamon Press(1959).

討論（DISCUSSION）

流体力学の幾何学的問題　　高木　隆司（東京農工大・物理）

C．球面上の振動モードについて

高木先生の予想 →
- 出っぱりが４本のときは正４面体になる。
- 出っぱりが６本のときは正８面体になる。
- 出っぱりが８本のときは正立方体になる。
- 出っぱりが１２本のときは正１２面体になる。
- 出っぱりが２０本のときは正２０面体になる。

このうち、たとえば

宮崎の予想 →
- ８本のときは反正４角柱になるかも知れない。
- １２本のときは反正６角柱になるかも知れない。

参考書：Feje Tóth "Regular Figures" 花粉の発芽孔の部分

宮崎　興二（神戸大・教養・図学）

C．相似則の Φ(t)の時間存在性について
コロイド溶液の gel 化を扱う、Smoluchov *) 方程式と呼ばれるものと類似していると思います。この場合、厳密に解が知られていないものでも、経験的に log-normal がよくあう、と聞いています。

* n(R) 体積 R の粒子の数

$$\frac{\partial}{\partial t} n(R) = -\sum_{R'} K(R,R')n(R)n(R') + \frac{1}{2}\sum_{R'} K(R-R',R')n(R-R')n(R')$$

R は、半径でもよいがこう書くためには、体積です。
K：合体の確率

冨田　博之（京大・教養・物理）

C．心臓の拍動の記述に、心臓を閉曲面でモデル化して球面調私関数で展開してその係数を用いるという試みがある。最近はＣＴ装置などを用いて心臓の３次元形状の実測データがとれるようになってきているため、それを表す数理モデルとして応用できる可能性がある。

鳥脇　純一郎（名古屋大・工）

C．原子核（or金属クラスター）の液滴モデルに関連した話題があります。微小振動だけでなく大振幅振動から分裂に至る過程まで議論されているようです。
- ・ストラティンスキー(?) Rev. of Mod. Phys.(?)
- ・物性研　菅野先生　in progress

堂寺　知成（東大・教養）

C．１：「静的」がこの会の趣旨と言うのは誤解です。
２：定常波の場合は節に補助線を入れると見易くなると思います。Ｙ40のとき節が２本のように見え、一寸錯覚を起こしました。
３：閉曲面の形を球面調和関数で分析する点、この会の最後の私の話も関係あります。

小川　泰（筑波大・物理工）